**Lecture 2**

**The Inverse Matrix**

Let*a*is the real number, non-zero**.** Exists for any *a* inverse number, denoted by *a-1,* which satisfies the relation . We introduce analogous concept for the matrices**.**

 Let .

**Definition.** Matrix ** is ​​called the inverse of the matrix ***А,***  if

******,

where *E* is an identity matrix.

If the determinant of a matrix is equal to zero, then the matrix is called **singular**, otherwise, if  , the matrix is called **regular**.

For an inverse of a matrix to exist the matrix must satisfy two conditions:

1) the matrix must be square;

2) the matrix must be regular or the determinant of the matrix must be non-zero.

Then the inverse matrix found by the formula

, (\*)

where - determinant, - cofactor of the matrix's element , *i=1,2,…,n; j=1,2,…,n.*

Any singular matrix has no an inverse matrix.

 **Example**. Given the matrix . Find the inverse matrix of A.

**Solution.**. First, calculate the determinant:

==.

Note that ******, that is, A is a regular matrix. Therefore, there exists the inverse matrix of A.

Next, find the cofactors of all elements:

, ,

, ,

, ,

, ,

.

Then, by the (\*) formula:

.

Verification:

.

 ***Elementary transformation*** The inverse matrix can be found by the method of elementary transformation*.*

Elementary transformation*:*

1. *matrix transposition;*
2. *changing of the row in places;*
3. *each element of an arbitrary row multiplied by the non-zero number;*
4. *each element of an arbitrary row multiplied by the non-zero number and add with relevant elements another row;*
5. *crossing out zero row.*

The method of elementary transformation. Let  square matrix.  obtained by appending the columns of given matrices and identity matrix. In particular,



Make elementary transformations for as long until we get the identity matrix in place given, (E|B). Then *B=A-1.*

**Example**. Given the matrix . Find the inverse matrix of A by the method of elementary transformation.

**Solution.** Consider the extended matrix (A|E).Do some elementary transformation

 



.

Then we hence, .

 Regular matrix has following properties:

1) , 2) ,

3) , 4).

**RANK**

Let us now introduce the concept of a *rank.* Let



By deleting multiple rows and columns, we can get a square matrix order  *k,* where *k*min*(m,n).*  Determinant of it square matrix is called minor of order k. The number of minors of order is  (combination).

**Def.** The rank of a matrix is ​​called the highest order non-zero minors of this matrix:

*r=r(A)= rankA* .

The rank provides an estimate of the number of linearly independent rows of a full matrix

 **Example**.  матрицаның рангісін есептейік.

**Шешуі**. Матрица өлшемі *3*х*4* болғандықтан, оның рангісі 3-тен артпайды, *r(A)*min*(3,4)*. Егер үшінші ретті минорлардың ең болмағанда біреуі нолден өзгеше болса, онда матрица рангісі 3-ке тең болады. Үшінші ретті минорлар матрицаның бір тік жолын сызып тастағанда пайда болады:

 , , , .

Үшінші ретті минорлардың бәрі нолге тең болғандықтан, ранг 3-ке тең бола алмайды. Енді екінші ретті минорлардың ішінен (олардың саны ) ең болмағанда бір нолге тең емес минор тапсақ, матрица рангісі 2-ге тең болады. Екінші ретті минорлар матрицаның бір жатық, екі тік жолын сызып тастағанда пайда болады. Айталық бірінші жатық жол мен бірінші және екінші тік жолдарды сызып тастағанда пайда болатын мына минор: , сондықтан *r(A)=2*.

 Матрица өлшемі артқан сайын оның рангісін барлық нолден өзге минорларды есептеу жолымен анықтау қиындайды. Матрица рангісін элементар түрлендірулер әдісімен табу ондай қиындықтардан құтқарады.

**Тheorem***. Elementary transformation does not change the rank of the matrix.*

Осы теореманы ескеріп, элементар түрлендірулер жасап, берілген матрицаны барлық диагоналдік элементтері нолден өзгеше болатындай етіп сатылы түрге келтіреміз:

,

мұндағы *rп.* Осы шарттың орындалуын матрицаны транстонерлеу арқылы қамтамасыз етуге болады.

Сонда матрицаның *r*–ретті нолден өзге миноры



бар болады да, матрица рангісі *r-*ге тең болады, яғни

*r(A)=r.*

**Example**.  матрицасының рангісін есептейік.

**Solution**. Элементар түрлендірулер көмегімен матрицаны сатылы түрге келтіреміз.





.

Соңғы матрица сатылы түрге келді және онда нолге тең емес үшінші ретті минор бар екенін бірден көруге болады:

. Сонымен матрица рангісі 3-ке тең, *r(A)=3.*